УДК 621.376.9

ОЦЕНИВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ФАЗОВОГО СДВИГА OFDM СИГНАЛА

Д.А. Долгих

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
E-mail: DolgihDA@tor.tusur.ru

Предложен способ оценивания линейного фазового сдвига OFDM сигнала, основанный на методе наименьших квадратов и его модификации. Проведена оценка эффективности данного способа. Рассмотрена возможность его реализации на микросхемах программируемой логики.

Введение

Формирование OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing – ортогональное частотное мультиплексирование) сигнала происходит путем обратного преобразования Фурье от поднесущих, модулированных по закону квадратурной амплитудной модуляции. На выходе обратного преобразования Фурье-сигнал периодический.

Промежуток времени, для которого амплитуда и фаза поднесущих остаётся постоянной, называют OFDM символом. Для правильного декодирования сигнала длительность символа должна быть больше или равна периоду сигнала на выходе обратного преобразования Фурье. Для компенсации межсимвольных искажений, вызванных многолучевой природой распространения сигнала, в начало символа помещается циклический префикс (*cyclic prefix* [1]), представляющий собой копию конца символа, рис. 1.

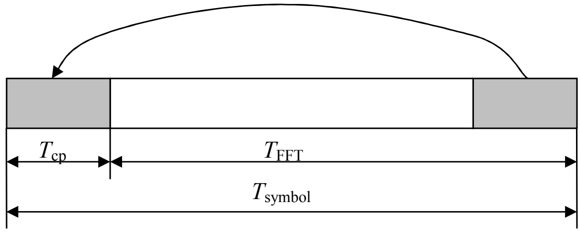


Рис. 1. *Структура OFDM символа*

На рис. 1 T_{FFT} – период сигнала полученного путем обратного образования Фурье (FFT – Fast Fourier Transform), T_{cp} – длительность циклического префикса, T_{symbol} – длительность OFDM символа.

На приемной стороне символ оцифровывается на интервале определения сигнала, равного длительности T_{FFT}. В результате прямого дискретного преобразования Фурье для каждой поднесущей OFDM символа определяется амплитуда и фаза. Если дискретная выборка принятого символа не совпадает по времени с T_{FFT}, то на выходе декодера каждая поднесущая OFDM символа получит фазовый сдвиг, что приведет к ошибке декодирования.

Компенсация фазового сдвига производится CORDIC (COordinate Rotation DIgital Computer) процессором [2]. Для корректной работы CORDIC процессора необходимо провести оценку фазового сдвига каждой из поднесущих или временного сдвига OFDM символа.

В данной статье предложен способ оценки временного сдвига OFDM символа и, как следствие, оценки линейного фазового сдвига поднесущих OFDM сигнала.

Оценка временного сдвига

При временном сдвиге OFDM символа фаза поднесущих изменяется следующим образом:

$$\dot{C}_k = FFT(\dot{S}_n),$$

$$\dot{C}_k e^{-j\frac{2\pi km}{N}} = FFT(\dot{S}_{n-m}),$$

где FFT – оператор прямого быстрого преобразования Фурье, $\dot{S}_n$ – дискретная комплексная выборка из OFDM символа, $\dot{C}_k$ – комплексные точки, соответствующие созвездиям квадратурной амплитудной модуляции (поднесущие), N – количество точек преобразования, количество поднесущих, m – смещение начала выборки, k – номер поднесущей, n – номер выборочного отсчета OFDM символа.

Для оценивания m необходимо использовать пилотные поднесущие. На этих поднесущих передается определенная последовательность, которая известна на приемной стороне. Приемная сторона может сравнивать параметры принятых пилотных поднесущих с эталоном.

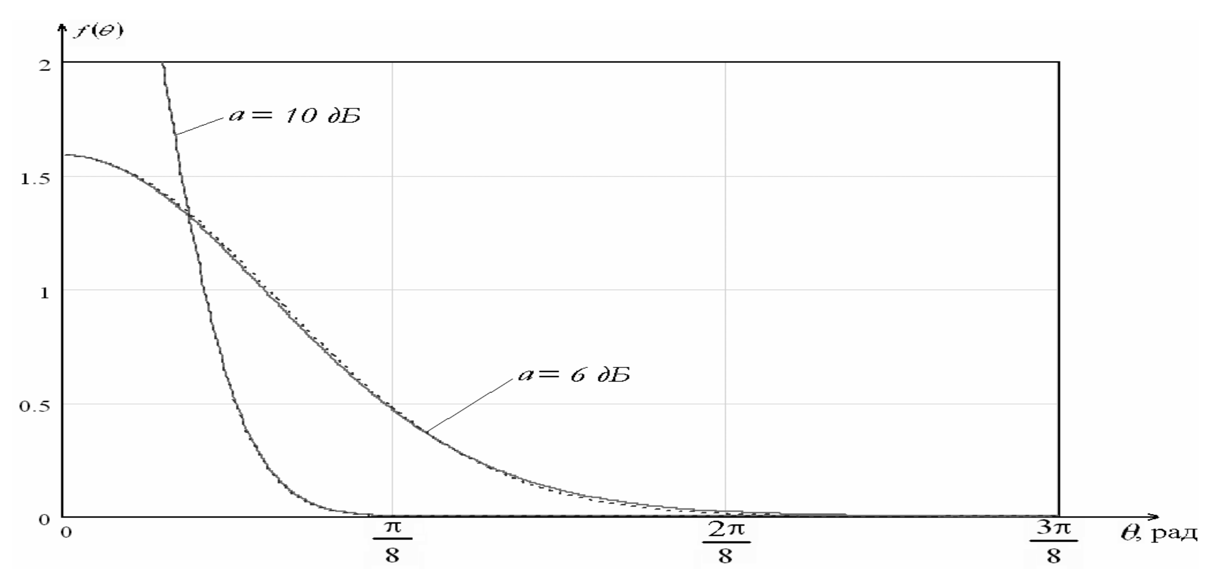


Рис. 2. *Плотности распределения фазы суммы гармонического сигнала и шума: —— по (3), - - - по (4)*

Для нахождения оптимального алгоритма оценивания m необходимо знать плотность распределения зашумленного сигнала.

Предположим, что на каждую пилотную поднесущую воздействует аддитивный узкополосный нормальный стационарный шум

$$\xi(t) = A(t)\cos[\omega_0 t - \vartheta(t)], \qquad (1)$$

где $A(t)$ – огибающая шума, ω_0 – эквивалентная частота шума, $\vartheta(t)$ – фаза шума, t – время.

Каждую поднесущую можно выразить как гармонический сигнал

$$s(t) = A_m \cos(\omega_c t),$$

где A_m – амплитуда сигнала, ω_c – частота сигнала.

Тогда сумму сигнала и шума можно представить в виде:

$$s(t) + \xi(t) = A_m \cos(\omega_c t) + A(t)\cos[\omega_0 t - \vartheta(t)] =$$
$$= V(t)\cos(\omega_0 t - \psi(t)) = V(t)\cos(\omega_c t - \theta(t)),$$

где $\Delta\omega = \omega_c - \omega_0$, $\theta(t) = \Delta\omega t + \psi(t)$, $V(t)$ – огибающая суммы сигнала и шума, $\theta(t)$ – фаза суммы сигнала и шума.

Согласно [3] совместная плотность вероятности для огибающей и фазы суммы гармонического сигнала и шума (1) в один и тот же момент времени равна:

$$f(V,\theta) =$$
$$= \frac{V}{2\pi\sigma^2}\exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(V^2 + A_m^2 - 2VA_m\cos(\theta))],$$
$$V \ge 0, \qquad (2)$$

где σ^2 – дисперсия шума (1).

Для нормального случайного процесса с симметричной спектральной плотностью огибающая $A(t)$ и фаза $\varphi(t+\tau)$ независимы как в совпадающие, так и в разные моменты времени [3]. Исходя из этого, при оценке m необходимо использовать только фазу пилотных поднесущих.

Проинтегрировав выражение (2) по всем возможным значениям V от 0 до ∞, получим плотность распределения фазы суммы гармонического сигнала и шума [3]

$$f(\theta) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}a^2}[1 + \sqrt{2\pi}a\cos(\theta)\Phi(a\cdot\cos(\theta))e^{\frac{1}{2}a^2\cos^2(\theta)}],$$
$$-\pi \le \theta \le \pi, \qquad (3)$$

где a – отношение сигнал/шум, $a = \frac{A_m}{\sigma}$, $\Phi(z)$ – интеграл вероятности, который определяется как:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx.$$

Выражение (3) можно упростить для малых и больших значений a.

Так, если a=0, то плотность распределения фазы становится равномерной.

Когда a>>1, с некоторым приближением можно считать

$$\exp(-\frac{1}{2}a^2) \approx 0,\ \cos(\theta) \approx 1,\ \sin(\theta) \approx \theta,\ \Phi(a) \approx 1,$$

тогда выражение (3) может быть преобразовано:

$$f(\theta) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}a^2\theta^2}, \quad a \gg 1. \qquad (4)$$

Выражение (4) соответствует нормальной плотности распределения. На рис. 2 изображены плотности распределения фазы суммы гармонического сигнала и шума при разном отношении сигнал/шум.

Зная плотность распределения фазы суммы гармонического сигнала и шума, можно выбрать метод оценивания параметра m. В качестве оценки параметра m допустимо использовать оценку максимального правдоподобия [4].

Предположим, что шум для разных пилотных поднесущих некоррелирован. Тогда оценивание

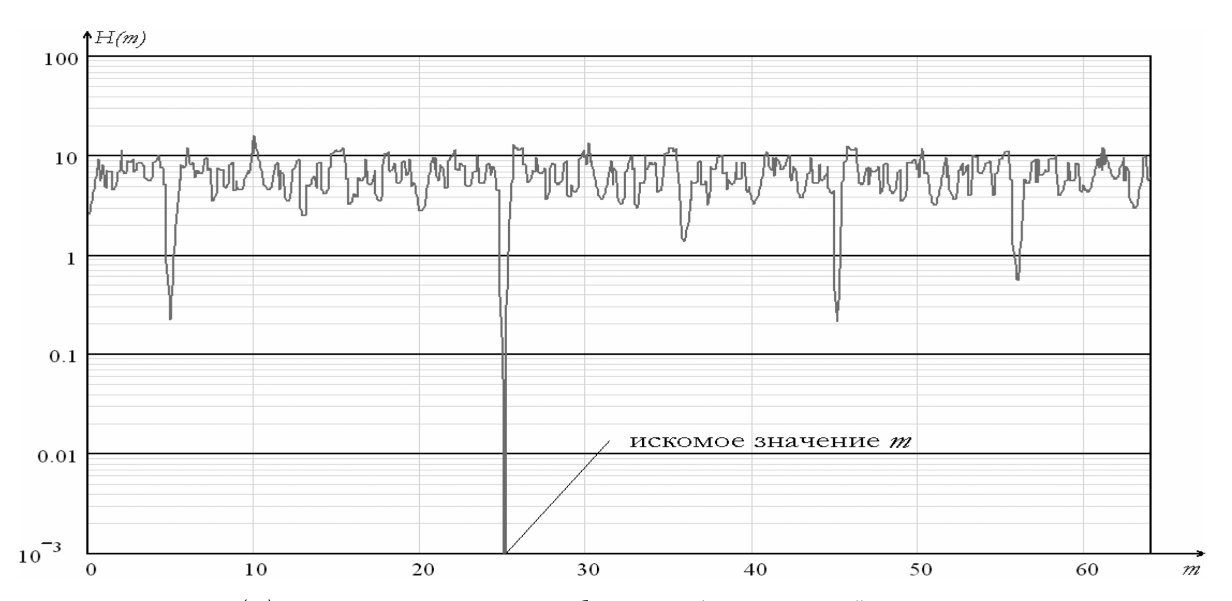


Рис. 3. Зависимость H(m) при циклическом сдвиге в преобразовании Фурье на 25 отсчётов

параметра m можем быть проведено на основе метода наименьших квадратов.

Подход с помощью метода наименьших квадратов к задаче оценивания содержится в теореме Гаусса. Она утверждает, что если ошибки Z_i некоррелированы и имеют нулевое среднее значение $E[Z_i]=0$ и одинаковую дисперсию $E[Z_i^2]=\sigma^2$, то оптимальными выборочными оценками параметров являются значения, минимизирующие сумму квадратов расхождений между наблюдаемыми значениями и подбираемой моделью

$$H(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_k)=\sum_{i=1}^{L}(y_i-\varepsilon_1 x_{i1}-\varepsilon_2 x_{i2}-...-\varepsilon_k x_{ik})^2, \quad (5)$$

где ε_i – подбираемые параметры, минимизирующие $H(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_k)$, L – количество отсчётов функции, по которым производится оценка.

Для рассматриваемого случая все условия соблюдаются. Тогда (5) можно переписать:

$$H(m)=\sum_{i=1}^{L}(\varphi_{irecive}-(\frac{-2\,\pi i m}{N})\,\mathrm{mod}(180))^2, \quad (6)$$

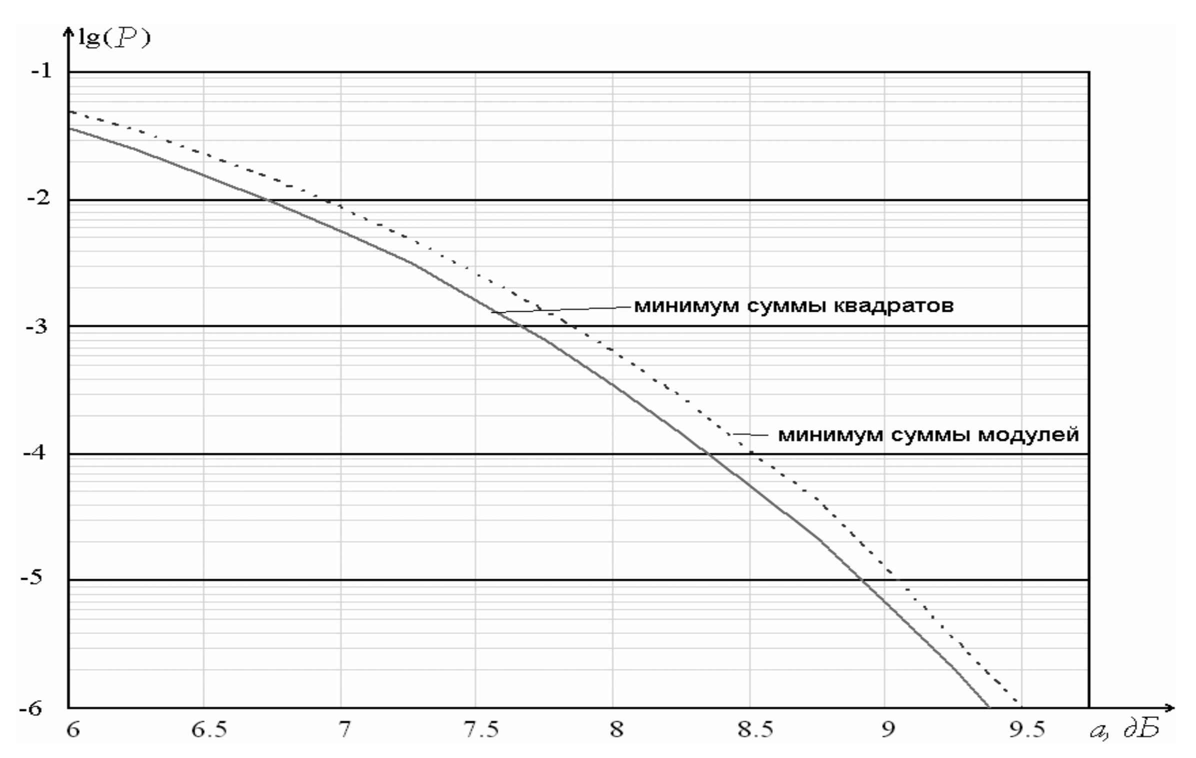


Рис. 4. Вероятность неправильного оценивания m в зависимости от отношения сигнал/шум при 256-точечном преобразовании Фурье

где N – количество точек преобразования Фурье, i – номера пилотных поднесущих, L – количество пилотных поднесущих, $\varphi_{irecive}$ – фазы принятых пилотных поднесущих.

В выражении (6) вычисляемое значение фазы должно находится в пределах ±180°, так как на приёмной стороне происходит измерение главного (в пределах ±180°) значения фазы.

Для оценивания параметра m необходимо подобрать такое m, чтобы $H(m)$ была минимальной. Стандартный подход к решению этой задачи заключается в дифференцировании $H(m)$ по m и нахождении такого m, при котором получившееся выражение равно нулю. Подробно метод и результаты описаны в [4].

Для нашего случая такой метод не подходит, так как имеется множество локальных минимумов (рис. 3).

Находить параметр m можно перебором всех возможных его значений.

При реализации вычисления выражения (6) при помощи микросхем программируемой логики желательно избежать применения операции возведения в квадрат, т. к. такие процедуры требовательны к аппаратному ресурсу. Эту операцию можно заменить операцией взятия модуля. Поэтому вместо выражения (6) можно использовать

$$H(m) = \sum_{i=1}^{L} \left| \varphi_{irecive} - \left(\frac{-2\pi i m}{N}\right) \mathrm{mod}(180) \right|. \qquad (7)$$

При воздействии шума на сигнал абсолютный минимум (рис. 3) становится менее выраженным, а в некоторых случаях и вообще исчезает. В связи с этим при определении m могут возникать ошибки. На рис. 4 представлены графики вероятности принятия ошибочного решения при вычислении оценок по выражениям (6) и (7).

Заключение

Оценивание линейного фазового сдвига OFDM сигнала можно производить при помощи метода наименьших квадратов. При этом необходимо находить минимум суммы квадратов отклонений фазы пилотных поднесущих от идеальных значений. Более простым, с точки зрения вычислений, является нахождение минимума суммы модулей отклонений фазы пилотных поднесущих от идеальных значений. Если данный способ оценивания реализован на микросхеме программируемой логики, то существенно экономится аппаратный ресурс микросхемы. Так, операция возведения в квадрат 8-разрядного числа занимает 30 логических элементов, а операция взятия модуля такого же числа занимает 8 логических элементов. Для 16-разрядных чисел возведение в квадрат и взятие модуля занимают соответственно 126 и 16 логических элементов. То есть замена операции возведения в квадрат на операцию взятия модуля позволяет уменьшить объем вычислений для 8-разрядных чисел более чем в 3 раза, а для 16-разрядных – более чем в 7 раз.

При замене операции возведения в квадрат на операцию взятия модуля для одной и той же вероятности принятия ошибочного решения необходимо увеличение отношения сигнал/шум на 0,15 дБ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. IEEE Std. 802.16 – 2004. IEEE Standard for local and metropolitan area networks.
2. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
3. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Советское радио, 1966. – 680 с.
4. Дженкинс М., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1971. – 284 с.